$4^{éme}$ Science

Série N°:5

(Suites réelles)

EXERCICE N°1 :

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1) a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, on a : $0 \leq u_n < 1$.
   b- Montrer que (u_n) est une suite croissante.
   c- En déduire que (u_n) est convergente, trouver sa limite.

2) Soit la suite v définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$

   a- Montrer que v_n est une suite géométrique, préciser sa raison.
   b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c- Retrouver la limite de u_n .

EXERCICE N°2 :

Soit la suite u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2 + u_n^2}{1 + u_n}$

1) a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, on a : $0 < u_n < 2$.
   b- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, (u_n) est une suite croissante.
   c- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, on a : $\dfrac{u_n}{1 + u_n} < \dfrac{2}{3}$

   b- déduire que : $2 - u_{n+1} < \dfrac{2}{3}(2 - u_n)$

   c- Montrer par récurrence que : $2 - u_n \leq (\dfrac{2}{3})^n$ puis retrouver la limite de u_n .

EXERCICE N°3 :

Soit u la suit réelle définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - u_n^2}} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

1) a- Montrer que pour tout n $\in$ IN, on a : $0 \leq u_n < \sqrt{2}$
   b- Montrer que la suite u est croissante.
   c- En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite v définie sur IN par : $v_n = \dfrac{u_n^2}{2 - u_n^2}$

   a- Montrer que v est une suite arithmétique de raison 1.
   b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c- Retrouver la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Pour tout n $\in$ IN*, on pose : $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n + \sqrt{v_k}}$

   a- Montrer que pour tout n $\in$ IN* : $\dfrac{n}{n + \sqrt{n}} \leq s_n \leq \dfrac{n}{n+1}$

   b- En déduire la limite de s_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE N°4 :

On considère la suite u définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}, n \in IN \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n $\in$ IN , $0 \leq u_n < 3$

2) Etudier la monotonie de la suite u.

3) Soit la suite v définie sur IN par : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

a- Montrer que v est une suite géométrique de raison 1/3.

b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) a- Montrer que pour tout n $\in$ IN, $|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - 3|$

b- Montrer que pour tout n $\in$ IN, $|u_n - 3| \leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ puis retrouve $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°5 :

Soit u la suite réelle définie sur IN par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

1) a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, $0 \leq u_n \leq 3$

b- montrer que $\forall$ n $\in$ IN, u_n est croissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, $|u_{n+1} - 3| \leq 1/3|u_n - 3|$

b- Montrer que $\forall$ n $\in$ IN, $|u_n - 3| \leq (1/3)^{n-1}$, puis retrouver al limite de u_n .